



TITLE:

# 安定成層中の山越え気流による雲の発生(複雑流体の数理とその応用)

AUTHOR(S):

河村, 哲也; 土屋, なお子

---

CITATION:

河村, 哲也 ...[et al]. 安定成層中の山越え気流による雲の発生(複雑流体の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2006, 1472: 164-174

ISSUE DATE:

2006-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/48132>

RIGHT:

## 安定成層中の山越え気流による雲の発生

お茶の水女子大学人間文化研究科 河村 哲也 (Tetuya Kawamura)  
 Graduate school of Humanities and Sciences, Ochanomizu University  
 富士通インフォソフトテクノロジー 土屋 なお子 (Naoko Tuchiya)  
 Fujitsu Info Software Technologies Limited

## 1. はじめに

気流が山を越えるとき強制的に上方向に曲げられる。このとき、大気の安定度によって種々の動きが生じる。通常の大気は安定状態にあるが、そのような場合には山越え気流には興味深い現象が起こる。ひとつは空気は山を越えることによって強制的に上方に曲げらるが、運動しているため釣り合い点を行き過ぎてやがて下に戻され、また下方に行き過ぎて上に戻されるといったことを繰り返す。これはばねの振動に似ていて、空気の軌跡は波打つことになる。この振動の周波数  $N$  は安定度によって決まり、ブラント・バイサラ振動数とよばれており

$$N^2 = \frac{g}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_P} \right) \quad (1)$$

であることが知られている。ただし、 $g$  は重力加速度、 $T$  は温度、 $C_P$  は定圧比熱である。この波の形は時間的にあまり変化せず、上昇気流と下降気流の生じる位置はあまり変化しない。上昇気流があるところでは雲ができやすいため特定の場所に雲がみえることがある。

もうひとつの現象は、安定度が強くなると、そもそも空気が上下方向に動きにくくなるという現象である。そこで、孤立峰をとおり過ぎる流れでは、空気は上方向には動きにくく横を迂回する傾向が現れる。

本研究では、主に安定状態にある場合について、山越え気流を計算し、さらに空気に水蒸気を含ませて雲の発生をシミュレーションした。

## 2. 計算方法

## 2. 1 基礎方程式

本研究では、鉛直方向に温度が変化する温度成層を考えているが、安定成層流を解析する場合には密度をおもてに出した定式化がよく行われるため、密度成層とみなして計算する。このとき、支配方程式は非圧縮ナビエ・ストークス方程式と密度の移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\rho}{Fr^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

となる。ただし、ブジネスク近似を用い、密度は拡散しないという仮定を用いている。また、 $z$  方向を鉛直方向にとり、方程式は無次元化している。なお、上式における圧力  $p$  および密度  $\rho$  は基本場からのずれである変動値を表している。すなわち、これらはもとの方程式に  $p = p_B + p'$ 、 $\rho = \rho_B + \rho'$  (添え字  $B$  は基準場を意味する) を代入して得られた方程式であるが、ずれを表すプライム記号は省略している。

定数  $Fr$  は

$$(Fr)^2 = \frac{\rho_0 U^2}{gL^2 |d\rho_0/dz|} \quad (7)$$

で定義される無次元数でフルード数とよばれている。その物理的な意味は慣性力と重力（浮力）の比であり、フルード数が小さいほど浮力の効果が大きくなる。

## 2. 2 雲の表現

雲を表現するもっとも直接的な方法は、水蒸気を湿度と温度をもった小さな粒子（空気の塊）と考えて、流れとともに移動させ、その粒子の温度が露点より低くなった段階で雲と判定するという方法である。このとき、露点は初期の温度と湿度からあらかじめ計算しておく。具体的には、まず Tetens の実験式

$$e = 6.11 \times 10^{7.5T/(237.3+T)} \times \frac{h}{100} \quad (e: \text{水蒸気圧} \quad T: \text{温度} \quad h: \text{湿度}) \quad (8)$$

を用いて温度と湿度から水蒸気圧を求める。露点 ( $T_d$ ) は湿度が 100 % になる温度であるから、式 (8) の  $h$  に 100 を代入して  $T$  について解いて、それを  $T_d$  と記せば

$$T_d = 237.3 \times \frac{\log(e/6.11)}{7.5 \log 10 + \log(6.11/e)} \quad (9)$$

となる。ただし、式 (8) は水に対するものであり厳密に言えば氷には使えない。しかし本研究では、簡単のため氷点下以下でも常に水（過冷却状態）であるとした。さらに、降雨による水分量の減少、すなわち露点の変化はないと仮定しているため、温度が露点を上回ったものは再び水蒸気に戻るものとしている。また、雲の発生に伴う流れへの影響は、潜熱の放出も含めて、考慮していない。

以上の方法では実際には大気中に無限にある水蒸気を有限個で表現している。そこで、現実近づけるためにはできるだけ個数を増やすのがよいが、個数の増大にともない計算量も莫大になる。そのため、少ない粒子であってもなるべく正確な結果ができるように次式で定義される雲の密集度を表す関数を用意する。

$$Cld(j, k, l) = \sum_{i=1}^{imax} \exp(-ad_i^2) \quad (10)$$

ここで、 $imax$  は粒子の数、 $d_i$  は  $i$  番目の粒子と格子点  $(j, k, l)$  の間の距離を表す。指数関数は距離  $d_i$  が小さいほど大きな値をとるため、粒子に近いほど雲量が多いということになる。このようにすることにより、有限個の雲粒子の隙間を連続的に埋めることができ、さらに複数個の粒子が集まる格子点で大きな値となるため、雲の厚みを表現できると考えられる。

雲粒子を運動させる場合、格子点と粒子の位置は一致しないため隣接の格子点における流体の流速を補間して粒子の速度を決める必要がある。この場合、一般には格子は直方体ではないため、図 1 の記号を用いて以下のような補間を行うことにした。

$$v' = \frac{\sum_{i=1}^8 v_i / r_i}{\sum_{i=1}^8 1 / r_i} \quad (11)$$

このように求めた速度から、粒子の新しい位置は

$$r^{n+1} = r^n + v' \Delta t \quad (12)$$

により計算する。

### 2. 3 フルード数と気温減率の関係

流れをフルード数（およびレイノルズ数）により決定し、粒子の初期の温度分布は気温減率から決める場合に、 $Fr$  と  $\gamma$  はともに大気の安定性に関連したパラメータであるため、勝手に与えるのではなく現実に矛盾しないように、フルード数と気温減率を関連づける必要がある。

フルード数はブラント・バイサラ振動数を  $N$  とすれば

$$Fr = U/(Nh) \quad (U: \text{代表速度 (一様風速)}, h: \text{代表長さ (山の高さ)}) \quad (13)$$

となる。一方、定義から  $\partial T/\partial z = -\gamma$  であるから

$$Fr = \frac{U}{h\sqrt{(g/T)((g/C_p) - \gamma)}} \quad (14)$$

となる。ここで、 $Fr = \infty$ （中立）のとき気温減率が断熱線の傾きと一致するため、

$$Fr = a \frac{U}{\sqrt{(9.76 - \gamma)}} \quad (15)$$

となる。 $a$  は  $h$  や  $T$  に依存するパラメータであるが、本研究では  $a = 2.4 \times 10^{-1}$  を使用した。

### 2. 4 数値解法

基礎方程式の数値解法としていろいろな方法が考えられるが、以下の計算では標準的なMAC法を用いている。差分近似としては、高レイノルズ数でも安定した計算ができるように、ナビエ・ストークス方程式および密度方程式の移流項に対して3次精度の上流差分を用いている。その他の空間微分は中心差分、時間微分は前進差分（オイラー陽解法）で近似している。

### 2. 5 計算条件

計算領域としては図2に示すような直方体領域をとり、山としては富士山を想定して直径40km、高さ4kmの円錐形のものを考えている。領域の広さは風向き方向に80km、横断方向に40km、高さ方向に12kmである。また、孤立峰の影響を調べることが目的であるため周囲の山は除外している。粒子を入れる位置は、 $x = 0$ 、 $10 < y < 30$ 、 $0 < z < 7$  として、 $y$  および  $z$  方向にそれぞれ2km および0.5km 間隔に150個の格子を無次元時間1ごとに繰り返し投入している。

雲粒子の追跡などに計算時間がかかるため、格子は流れ方向に 61 点、他の方向は 31 点にして計算している。ただし、このような少ない格子でもなるべく精度の高い計算を行うため、境界適合格子系を用い、さらに山の近くで格子を細かくとっている。図 3 に用いた格子の一部を示している。初期条件は全領域で流体が静止し、圧力変動や密度変動はない ( $u = 0$ 、 $p = 0$ 、 $\rho = 0$ ) として、そこに突然境界から風が吹き込んだとした。境界条件については表 1 に、計算に用いたパラメータは表 2 にまとめている。また、図 4 にプログラムの流れ図を示す。

### 3. 計算結果

以下に、いままで述べた方法によって得られた典型的な計算結果を示す。

はじめにフルード数が山越え気流に及ぼす影響を調べるために  $Fr = 0.5$  と 2.0 の結果を示す。この場合は雲の計算は行っていない。図 5 は中央断面内の流れの様子であり、上流から放出した粒子の軌跡で流れ場を表示している。図 5 の左側に示す  $Fr = 0.5$  の場合には成層度は強く、風上から出発した粒子はほぼ直線的に進んでいる。そして、山の背後には到達できないことがわかる。図 6 は地面に平行で山の高さの  $1/2$  の位置での断面内の粒子の軌跡であるが、山の高さ以下の場所から出発した粒子はこの図のように水平断面内を大きく迂回することがわかる。なお、図の直線の交点が山の頂上の位置である。一方、図 5 の右側に示す成層度の弱い  $Fr = 2.0$  の結果では粒子は山を越えたあと、山によって乱された流れに巻き込まれて流れていく様子が見られる。

次に雲を発生させた結果を示す。図 7 は空気の湿度が 70 %、気温減率が  $8^\circ \text{C/km}$ 、風速が 10m、フルード数が 1.73 の結果で、いくつかの時刻における粒子の軌跡と雲を同時に表示した図である。この図から、粒子の軌跡が波打っている場所で雲が発生していることがわかる。特に山のすぐ後方でいったん下降した流れがすぐに上昇気流となり大きな雲を発生させている。一方、下降気流のある場所では雲は発生しない。図 8 は同じ結果を 3 次元的に表示した例である。

図 9 は空気の湿度を 50 %、70 %、90 % と変化させたときの雲の形状の違いを図示したものである。予想されるとおり、湿度が高いほど広範囲に雲ができていくことがわかる。また山の後方において、はじめに発生する雲の位置はほぼ同じである。雲の頂上と雲底の高さを比較したものが図 10 であるが、雲底の高さは湿度が高いほど低くなるが、雲の頂上の高さは湿度によらずほぼ一定であることがわかる。

次に気温減率の変化が雲の発生に及ぼす影響を調べる。図11は気温減率が $5, 6.5, 8^{\circ}\text{C/km}$ の結果である。この結果から気温減率が大きいほど広範囲に雲が発生することがわかる。これは気温減率が大きいほどフルード数は大きくなり流れの安定性が弱まり、大気が乱れて上昇気流が発生しやすくなるためと解釈できる。図12は雲底と雲の頂上の位置を比較した図であるが、気温減率が大きいほど雲底は低くなる。これは気温の下がりかたが大きいので、低い位置で露点に達するためである。

最後に風速を $5, 10, 15\text{m/s}$ と変化させた結果を図13に示す。風速が速いほど雲が広範囲に発生し量も多くなっている。また形状も風速が大きいほど横に長くなっている。また図14に示すように風速が速い場合には、形状の変化も大きく速いことがわかる。

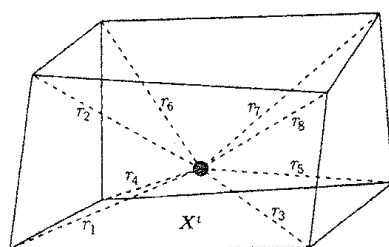


図1 補間法

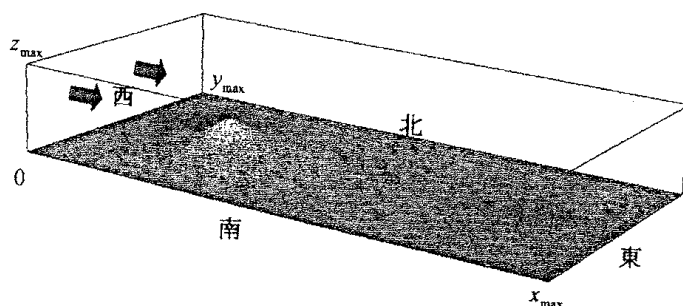


図2 富士山モデル

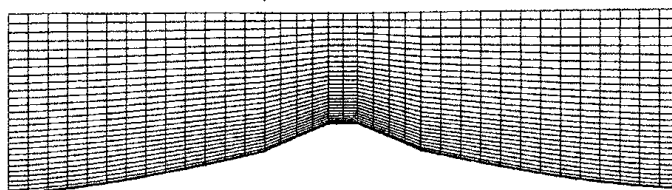


図3 計算に用いた格子

表1 境界条件

・風上側 (西側)	速度：一様流, 圧力変動：外挿, 密度変動：0 $u = 1, v = w = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \rho = 0$
・風下側 (東側)	速度：外挿, 圧力変動：外挿, 密度変動：外挿 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$
・上面	速度：滑り条件, 圧力変動：外挿, 密度変動：外挿 $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, w = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$
・下面	速度：粘着条件, 圧力変動：外挿, 密度変動：外挿 $u = v = w = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$
側面 (南北側)	速度：外挿, 圧力変動：外挿, 密度変動：外挿 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$

表2 計算に用いたパラメータ

パラメータ	数値
X方向の格子数	61
Y方向の格子数	31
Z方向の格子数	31
タイムステップ数	8000
時間刻み幅	風速により変化 0.015, 0.010, 0.0075, 0.005
ポアソン方程式の反復回数	20
ポアソン方程式の収束誤差	0.001
レイノルズ数	2000
フルード数	変化させる
Y方向の粒子数	10
Z方向の粒子数	15
時間方向の粒子数	0 ~ 80
湿度	変化させる
気温減率	変化させる
地上の温度	15

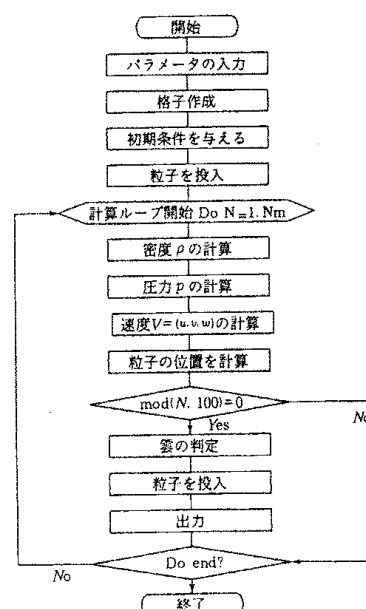


図4 プログラムの流れ図



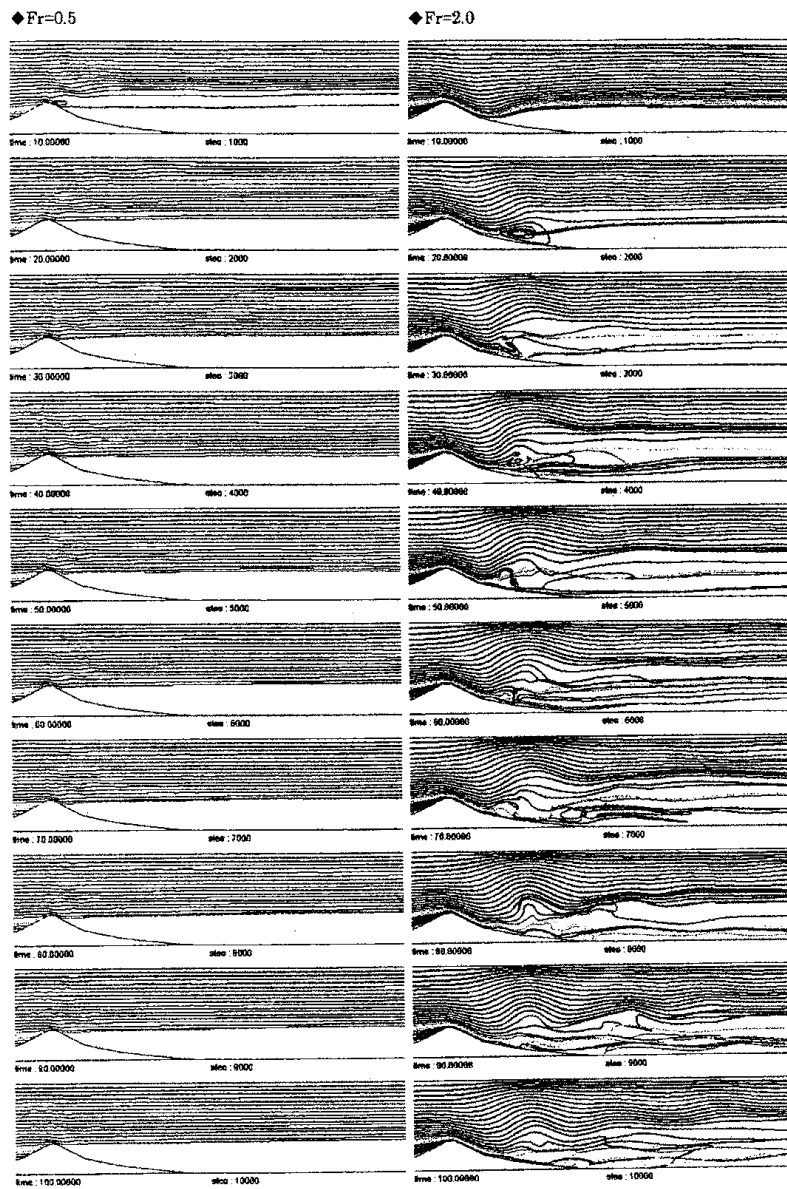


図 5 中央断面内の流線の時間変化 (左  $Fr = 0.5$ , 右  $Fr = 2.0$ )

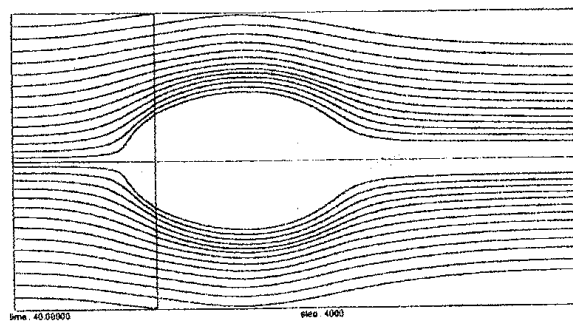


図 6 高さ 2 km の水平面内の流線 (山頂は P 点)

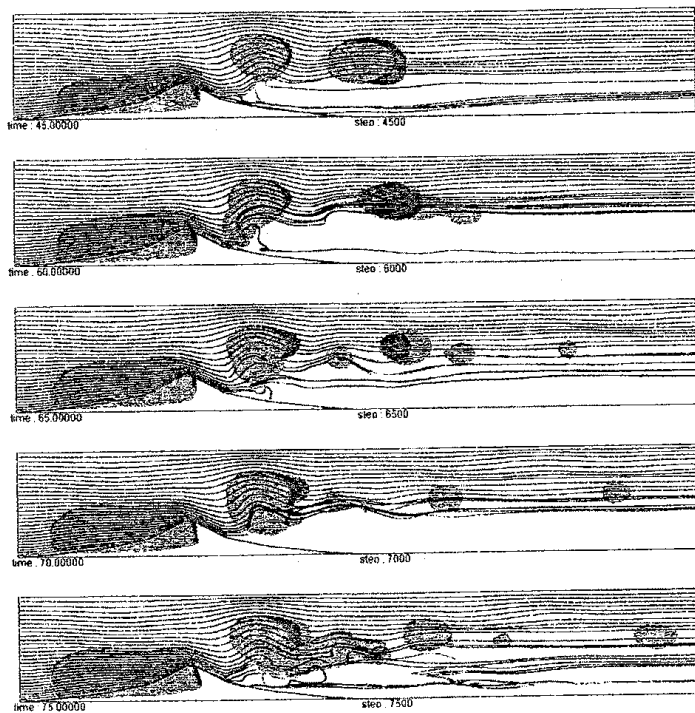


図7 流れの様子と雲の位置 (湿度 70 %, 気温減率  $8^{\circ}\text{C}/\text{km}$ , 風速 10 m/s,  $F_r = 1.73$ )

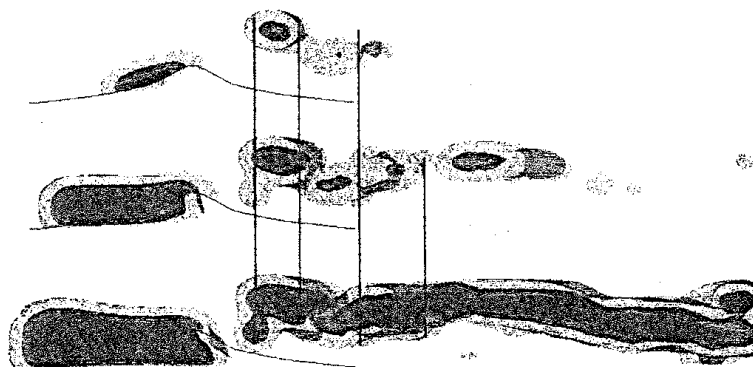


図9 湿度変化による雲の差 (上から順に 50 %, 70 %, 90 %)

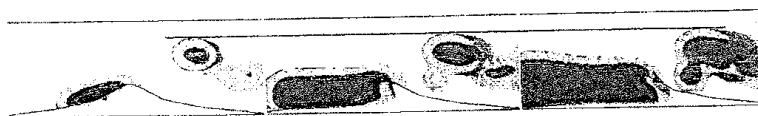


図10 湿度変化による雲頂高さの比較 (左から順に 50 %, 70 %, 90 %)

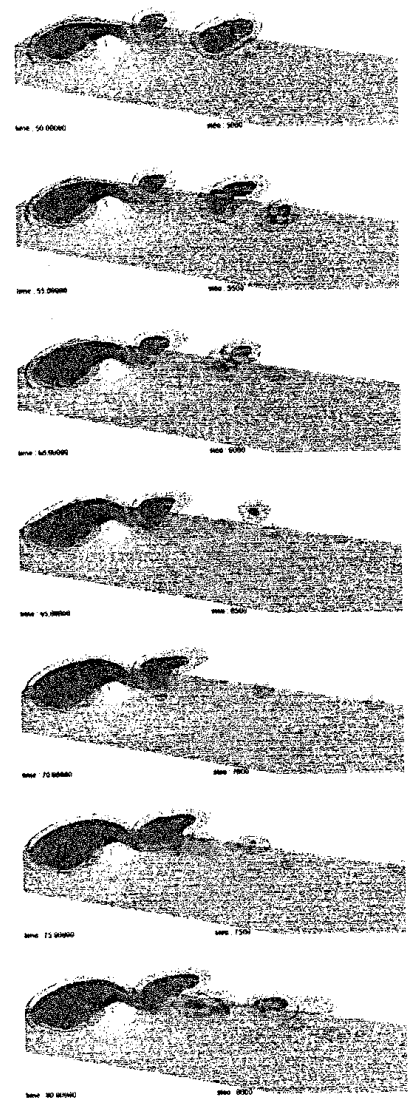


図8 雲の発生と時間変化

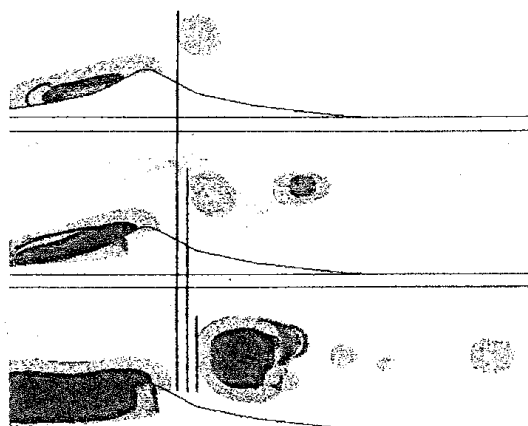


図 1.1 気温減率が雲の前後位置に及ぼす影響（上から順に  $\gamma = 5, 6, 8^\circ\text{C}/\text{km}$ ）



図 1.2 気温減率が雲の上下位置に及ぼす影響（左から順に  $\gamma = 5, 6, 8^\circ\text{C}/\text{km}$ ）

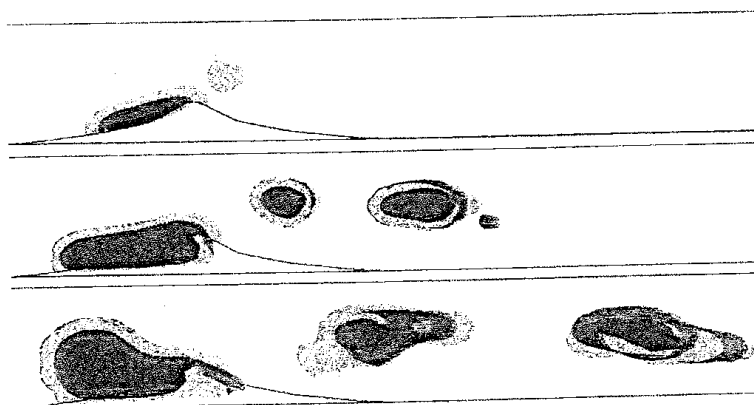


図 1.3 風速が雲に及ぼす影響（上から順に 5, 10, 15 m/s）

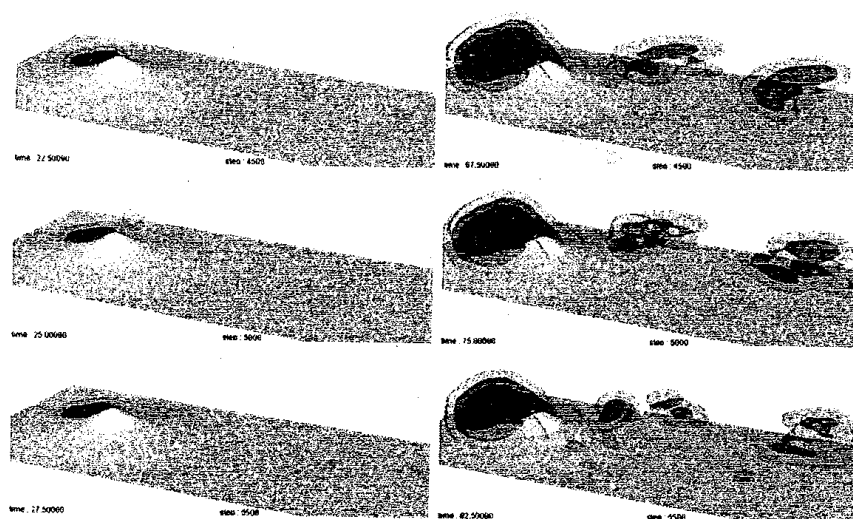


図 1.4 風速の違いによる雲の発生と発達 (左: 5 m/s, 右: 15 m/s)

#### 4. まとめ

本研究では雲の発生の簡単なシミュレーション法を示した。多くの近似を用い、また計算格子数や雲の粒子数も少ないにもかかわらず、独立峰にみられる笠雲や吊し雲に近い雲が再現でき、物理的にみても妥当な結果が得られている。ただし、凝結による潜熱の放出を考慮していないことや風上側の限られた位置だけから粒子を入れているなどが原因で、全体的に雲が山の風上側にできる傾向が見られる。

#### 参考文献

- [1] D.J. Tritton: Physical Fluid Dynamics 2nd ed., Oxford Science Publications, 1988
- [2] 内田孝紀、大屋裕二: 有限深さ流路内の2次元丘陵地形を過ぎる安定成層流の非定常性—第2報 非定常な剥離・再付着流れに対する安定成層の効果—、ながれ18、308-320、1999
- [3] 内田孝紀、大屋裕二: 安定成層場における山越え気流の三次元数値シミュレーション—非定常な剥離・再付着流れに対する安定成層の効果—、ながれ22、63-78、2003